OPCIÓN A

1.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} x-x^2 & si \quad 0\le x\le 1 \\ (x-1)\ln^2 x & si \quad 1<x\le 2 \end{cases}$ $\ln(x-1)$

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de ***f (x)*** en ***x* = 1**

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva ***y* = *f* (*x*)** en el punto de abscisa $x=\frac{3}{4}$

$a)$

$$\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1-1^2=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=(1-1)\ln^2 1=0\cdot 0^2=0 \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0 \Rightarrow Continua\ en\ x=1$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1-2x & si \quad 0<x<1 \\ \ln^2 x+2\ln x\cdot\frac{x-1}{x} & si \quad 1<x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=1-2\cdot 1=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\ln^2 1+2\ln 1\cdot\frac{1-1}{1}=0^2+2\cdot 0\cdot\frac{0}{1}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=-1\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)=0 \Rightarrow No\ es\ derivable\ en\ x=1$$

$b)$

$$\begin{cases} f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}-\frac{9}{16}=\frac{12-9}{16}=\frac{3}{16} \\ f'\left(\frac{3}{4}\right)=1-2\cdot\frac{3}{4}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y-\frac{3}{16}=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow 16y-3=-8x+8\Rightarrow$$

$$8x+16y-11=0$$

2.- Calcular las integrales indefinidas siguientes $a)\quad \int\frac{5dx}{(6x+4)^2+2} \qquad b)\quad \int\frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}\,dx$

$$a)\quad \int\frac{5dx}{(6x+4)^2+2}=5\int\frac{\frac{dt}{6}}{t^2+2}=\frac{5}{6}\int\frac{dt}{2\left(\frac{t^2}{2}+1\right)}=\frac{5}{12}\int\frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}=\frac{5}{12}\int\frac{\sqrt{2}\,du}{u^2+1}=\frac{5\sqrt{2}}{12}\ arc\ tg\ u$$

$$6x+4=t\Rightarrow 6\,dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{6} \qquad\qquad \frac{t}{\sqrt{2}}=u\Rightarrow\frac{dt}{\sqrt{2}}=du\Rightarrow dt=\sqrt{2}du$$

$$\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\frac{5\sqrt{2}}{12}\ arc\ tg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{12}\ arc\ tg\left(\frac{6x+4}{\sqrt{2}}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{12}\ arc\ tg\left[\frac{2(3x+2)}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\frac{5\sqrt{2}}{12}\ arc\ tg\left[\sqrt{2}\,(3x+2)\right]+K$$

Continuación del Problema 2 de la opción A

$$b)\quad \int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{4x^2-12x+9}{3\sqrt{x}}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx - \frac{12}{3}\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx + \frac{9}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{4x^2-12x+9}{3\sqrt{x}}\,dx = \frac{4}{3}\int x^{2-\frac{1}{2}}\,dx - 4\int x^{1-\frac{1}{2}}\,dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}\,dx = \frac{4}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 4\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 4\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}\,dx = \frac{4}{3}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 4\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6\cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{15}\cdot x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + 6\sqrt{x} = \frac{8}{15}\cdot\sqrt{x^5} - \frac{8}{3}\cdot\sqrt{x^3} + 6\sqrt{x}$$

$$\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}\,dx = \frac{8}{15}\cdot x^2\sqrt{x} - \frac{8}{3}\cdot x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\left(\frac{4}{15}\cdot x^2 - \frac{4}{3}\cdot x + 3\right) + K$$

3.- Resolver el siguiente sistema matricial $\begin{cases} 2P+Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ P-Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2P+Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ P-Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 2P+Q+P-Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Q = P - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.- Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+mz-3=0$

a) Determinar el valor del parámetro ***m*** para que la recta y el plano sean secantes.
b) Determinar el valor del parámetro ***m*** para que la recta y el plano sean paralelos.
c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta ***r*** del enunciado y un plano ***α*** de ecuación

$$\alpha \equiv 2x+y+z-\frac{5}{3}=0$$

a) Si son secantes tendrán un punto común y es la solución del sistema formado por los tres planos cuando es Compatible Determinado

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-2z=0 \\ 2x+y+mz=3 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & m-2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & m-2 \end{vmatrix} = -3m+6-3 = -3m+3$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow -3m+3=0 \Rightarrow 3m=3 \Rightarrow m=1$$

$$\forall m \in \Re - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sist.Compatible\ Determiando$$

b) Si son paralelos la recta y el plano no tienen ningún puntos comun, el sistema tiene que ser Incompatible y esto se puede dar, solo, cuando **m = 1**, lo comprobamos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

c) El sistema al ser m = 1 no puede ser Compatible Determinado, por lo tanto si es Compatible Indeterminado la recta estará contenido en el plano (tiene infinitos puntos de contacto) y de ser Incompatible (no tiene ningún punto de contacto) la recta es paralela al plano

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado \Rightarrow$$
$$La\ recta\ r\ esta\ contenida\ en\ el\ \ plano\ \alpha$$

OPCIÓN B

1.- Determinar el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los intervalos de concavidad y convexidad, las asíntotas, los puntos de corte con los ejes, los extremos y los puntos de inflexión de la función $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x}$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{(0-2)^2}{0}=\frac{(-2)^2}{0}=\frac{4}{0} \Rightarrow No\ hay\ solución \Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re-\{0\}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x-2)^2}{x^2}=\frac{2x^2-4x-x^2+4x-4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2} \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2}>0 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ x^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases}$$

	$-\infty$	-2	2 ∞
x > 2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x > 2	**(-)**	**(+)**	**(+)**
X^2 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Creciente $\forall x\in\Re/(x<-2)\cup(x>2)$ **Decreciente** $\forall x\in\Re/-2<x<2$

Máximo relativo en $x=-2 \Rightarrow f(-2)=\frac{(-2-2)^2}{-2}=\frac{(-4)^2}{-2}=\frac{16}{-2}=-8$ De crecimiento pasa a decrecimiento

Mínimo relativo en $x=2 \Rightarrow f(2)=\frac{(2-2)^2}{2}=\frac{0^2}{2}=\frac{0}{2}=0$ De decrecimiento pasa a crecimiento

$$f''(x)=\frac{2x\,x^2-2x(x^2-4)}{x^4}=\frac{2x^3-2x^3+8x}{x^4}=\frac{8x}{x^4}=\frac{8}{x^3} \Rightarrow Concavidad \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow \frac{8}{x^3}>0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ x^3>0 \Rightarrow x>0 \end{cases}$$

8 > 0	**(+)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Concavidad $\forall x\in\Re/x>0$ **Convexidad** $\forall x\in\Re/x<0$

Punto de inflexión en $x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{(0-2)^2}{0}=\frac{4}{0}$ **No hay** porque no está en el dominio de la función

Asíntota vertical x = 0

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)^2}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ ´L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x-2)}{1}=\frac{\infty}{1}=\infty\Rightarrow$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)^2}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ ´L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-2)}{1}=\frac{\infty}{1}=-\infty\Rightarrow$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x-2)^2}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)^2}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ ´L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x-2)}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Utilizando\ ´L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-2)^2}{x}-1x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-2)^2-x^2}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+4}{x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Utilizando\ ´L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{1}=-4\Rightarrow \textit{Existe asíntota oblicua, } y=m-4 \textit{ cuando } x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{(x-2)^2}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)^2}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ ´L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-2)}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\xrightarrow{Utilizando\ ´L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x-2)^2}{x}-1x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x-2)^2-x^2}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+4-x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+4}{x}=$$

$$=\frac{\infty}{-\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ ´L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{1}=-4\Rightarrow \textit{Existe asíntota oblicua, } y=m-4 \textit{ cuando } x\to-\infty$$

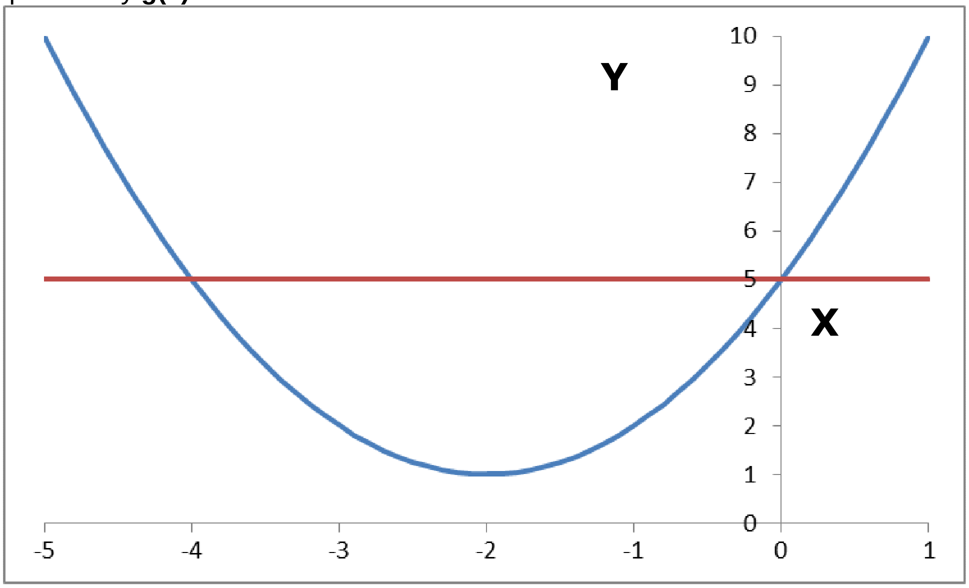
Puntos de corte con OX $\Rightarrow y=f(x)=0\Rightarrow\frac{(x-2)^2}{x}=0\Rightarrow(x-2)^2=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow$

$$x=2\Rightarrow f(2)=\frac{(2-2)^2}{2}=\frac{0^2}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Puntos de corte con OY $\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\frac{(0-2)^2}{0}=\frac{4}{0}\Rightarrow$ *Sin solución (Asíntota vertical)*

2.- a) Dibujar las gráficas aproximadas de ***f (x) = x*² + 4*x* + 5** y ***g*(*x*) = 5** , señalando los puntos de corte entre ambas curvas.
b) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las dos funciones del apartado a)

a) **f(x)** es una parábola y **g(x)** una recta



$$Puntos\ de\ corte\ entre\ \ funciones \Rightarrow x^2+4x+5=5 \Rightarrow x^2+4x=0 \Rightarrow x\,(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x=0 \end{cases}$$

$$Puntos\ de\ corte\ de\ \ f(x)\ con\ OX\ \Rightarrow y=0 \Rightarrow x^2+4x+5=0 \Rightarrow \Delta = 4^2-4\cdot 1\cdot 5=-4<0 \Rightarrow No\ hay$$

b)

$$A=\int_{-4}^{0} 5\,dx-\int_{-4}^{0}\left(x^2+4x+5\right)dx=\int_{-4}^{0}\left(-x^2-4x\right)dx=-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-4}^{0}-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-4}^{0}=$$

$$A=-\frac{1}{3}\cdot\left[0^3-(-4)^3\right]-2\cdot\left[0^2-(-4)^2\right]=-\frac{1}{3}\cdot\left[0-(-64)\right]-2\cdot(-16)=-\frac{64}{3}+32=\frac{-64+96}{3}=\frac{32}{3}\,u^2$$

3.- Dada las matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar el rango de la matriz ***A*** según los diferentes valores del parámetro ***m***
b) Calcular la matriz inversa $\mathbf{A^{-1}}$ para **m = 1**.

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & m^2-3 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & m^2-3 \end{vmatrix}=m\left(m^2-3\right)\Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow m\left(m^2-3\right)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m=0 \\ m^2-3=0 \Rightarrow m^2=3 \Rightarrow m=\pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \forall m \in \Re-\left\{-\sqrt{3}\,,0\,,\sqrt{3}\right\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang\ (A)=3$$

$a)\ Continuación$

$Si\ m=0$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow rang\,(A)=2$$

$Si\ m=-\sqrt{3}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -\sqrt{3} & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -\sqrt{3} & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow rang\,(A)=2$$

$Si\ m=\sqrt{3}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow rang\,(A)=2$$

b) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^{t} \Rightarrow A^{t}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ A^{t}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4.- Dada las rectas: $r_1 \equiv x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{3}$, se pide:

a) Demostrar que se encuentran en un mismo plano.
b) Hallar la ecuación del plano que determinan.

a) Las rectas formarán un plano siempre que no se crucen en el espacio. Puestas las dos rectas en paramétricas, e igualando sus coordenadas, si el sistema resultante es compatible determinado se cortan en un punto, si el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitos puntos comunes y la recta es la misma, si el sistema es incompartible y sus vectores directores iguales o proporcionales las rectas son paralelas en el mismo plano, si no lo son se cruzan y, en este caso, no determinarán un plano

$$\begin{cases} r_1 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases} \\ r_2 \equiv \begin{cases} x=-5+4\mu \\ y=3-2\mu \\ z=-4+3\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda=-5+4\mu \\ 1-\lambda=3-2\mu \\ -2+2\lambda=-4+3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda-4\mu=-6 \\ \lambda-2\mu=-2 \\ 2\lambda-3\mu=-2 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 20-20=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda-4\mu=-6 \\ \lambda-2\mu=-2 \end{cases} \Rightarrow -2\mu=-4 \Leftarrow \mu=\frac{-4}{-2}=2 \Rightarrow \lambda-8=-6 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow$$

$$2\lambda-3\mu=-2 \Rightarrow 2\cdot 2-3\cdot 2=-2 \Rightarrow \textit{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow$$

$$\textit{Se cortan en un punto las dos rectas}$$

b) Conocidos los vectores directores de las rectas y un punto cualquiera de una de ellas (tomaremos el indicado en la ecuación de r1), el determinante que forman los dos vectores con el vector RG, siendo R el punto tomado de la recta r_1 y G el punto genérico del plano, será nulo ya que son vectores coplanarios

$$\textit{Siendo } R(1,1,-2) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}}=(1,-1,2) \\ \overrightarrow{v_{r_2}}=(4,-2,3) \\ \overrightarrow{RG}=(x,y,z)-(1,1,-2)=(x-1,\, y-1,\, z+2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$-3(x-1)+8(y-1)-2(z+2)+4(z+2)+4(x-1)-3(y-1)=0 \Rightarrow (x-1)+5(y-1)+2(z+2)=0$$

$$\pi \equiv x+5y+2z-2=0$$

Continuación del Problema 4 de la opción B

c) El plano α contiene los vectores de las dos rectas y el vector QG, siendo Q el punto de intersección hallado en a) y G el vector genérico del plano. Los tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) siendo combinación lineal una de las otras y el determinante de la matriz que forman es nulo.

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1+\mu \\ y = \mu \\ z = 3+\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1+\mu \\ 1-\lambda = \mu \\ 3 = 3+\mu \Rightarrow \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1+0 = 1 \\ 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\,,-1\,,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{QG} = (x\,,\,y\,,\,z)-(1\,,0\,,3) = (x-1\,,\,y\,,\,z-3) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x-1 & y & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$z-3-(x-1)-y+z-3 = 0 \Rightarrow -x+1-y+2z-6 = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x+y-2z+5 = 0$$